Progressioni geometriche

1) **Proprietà generali**

Un insieme ordinato di numeri $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$dicesi **progressione geometrica** se

$\forall n \in N$ si ha : $\boxed{\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q}$ **[1]**

con **q** quantità costante diversa da **1** detta **ragione** o quoziente .

Una progressione geometrica di ragione **q** si indica col simbolo **G(q)** e si scrive :

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ **G(q)** limitata nei due sensi

$......a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ **G(q)** illimitata nei due sensi

$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ **G(q)** illimitata in un senso

Se gli elementi di una **G(q)** sono reali e la ragione è positiva , la progressione si dice **crescente** se risulta $q > 1$, **decrescente** se risulta $q < 1$.

Se invece è $q < 0$ la progressione geometrica dicesi **alternata** .

2) **Proprietà delle progressioni geometriche**

- $\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$ **[1]** ■ $\boxed{a_{n+k} = a_n \cdot q^k}$ **[2]**

- **Relazione tra due termini qualsiasi** $\boxed{a_s = a_k \cdot q^{s-k}}$ **[3]**

■ **Prodotto di due termini coniugati**

Due termini di una progressione geometrica di n termini si dicono **coniugati** o <u>simmetrici</u> quando la somma dei loro indici è **n + 1** .

$\boxed{a_1 \cdot a_n = a_{n-k} \cdot a_{k+1}}$ **[4]**

O S S E R V A Z I O N E

Se la progressione geometrica è limitata ed ha un numero dispari di termini , quello centrale a_c è *coniugato di se stesso* , per cui la [4] diventa :

$a_c^2 = a_1 a_n$ $\boxed{a_c = \sqrt{a_1 a_n}}$ **[5]**

■ **Prodotto di n termini consecutivi** $P_n^2 = (a_1 \cdot a_n)^n$ $\boxed{P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}}$ **[6]**

■ **Somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica**

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1 \quad \text{se} \quad q > 1 \qquad \textbf{[7]}$$

$$S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1 - q} = \frac{1 - q^n}{1 - q} \cdot a_1 \quad \text{se} \quad q < 1 \qquad \textbf{[8]}$$

■ **Somma dei termini di una progressione geometrica illimitata**

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}}$$ **[9]** se $|q| < 1$ cioè se : $-1 < q < 1$

Successioni numeriche

DEFINIZIONE N° 1

Dicesi **successione di numeri reali** o successione numerica una funzione ***f*** di **N** in **R** [oppure di $N^* = N - \{0\}$ in **R**] . In simboli matematici abbiamo : $f : N \to R : n \in N \to f(n) = a_n \in R$

<< **Una successione numerica è una funzione *f* che ad ogni** $n \in N$ associa una immagine $f(n) = a_n \in R$ >>

Una successione è una funzione il cui dominio è l ' insieme **N** ed il cui codominio è un sottoinsieme di **R** .

Si dice anche che una successione è una funzione definita in **N** ed a valori in **R** .

Gli elementi del codominio della successione , che sono le immagini della funzione ***f*** , si dicono i termini della successione .

Per le successioni , la *variabile indipendente* viene indicata col simbolo $n \in N$, e l'immagine $f(n)$ col simbolo a_n [o con x_n o con y_n] .

$$\begin{array}{l} N \xrightarrow{\quad f \quad} R \\ 1 \longrightarrow f(1) = a_1 \\ 2 \longrightarrow f(2) = a_2 \\ 3 \longrightarrow f(3) = a_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \longrightarrow f(n) = a_n \end{array}$$

Una successione si indica con uno dei seguenti simboli : $\{a_n\}$, (a_n) , $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$

Dare una successione significa assegnare una legge ***f*** di natura qualsivoglia in base alla quale ad ogni numero naturale n corrisponda un solo numero reale a_n :

$$f : n \longrightarrow a_n \qquad\qquad n \xrightarrow{\ f\ } a_n$$

$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots\cdots$ sono i termini o gli elementi della successione $\{a_n\}$, a_n dicesi **termine generale** della successione . Due o più termini di una stessa successione , pur occupando posti diversi , possono essere uguali . Una successione può essere individuata mediante il **termine generale** o per **ricorrenza** . Nel primo caso il termine a_n è individuato da una formula (ad esempio $a_n = \dfrac{n+1}{n}$) , nel secondo caso si assegna il valore del primo termine a_1 e si indica la legge che fa passare da un termine al successivo . Una successione presenta un solo **punto di accumulazione** che è $+\infty$ (o $-\infty$) . Una successione non presenta punti di accumulazione al finito .Una successione si dice **limitata superiormente** , *inferiormente* , limitata se tale è il suo codominio .

$$\sup a_n = \text{estremo superiore di } a_n \quad , \quad \inf a_n = \text{estremo inferiore di } a_n$$

Se la successione non è limitata superiormente (inferiormente) si scrive :

$$\sup a_n = +\infty \quad (\inf a_n = -\infty)$$

e si dice che la successione è **illimitata superiormente** (*inferiormente*) .

■ ■ ■ Esempi di successioni il cui termine generale a_n è espresso mediante una formula matematica

$$a_n = \frac{1}{n} \quad , 1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{3} , \frac{1}{4} , \frac{1}{5} , \frac{1}{6} ,......$$

$$a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \quad , 2 , \frac{3}{2} , \frac{4}{3} , \frac{5}{4} , \frac{6}{5} ,.....$$

$$a_n = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \quad , 0 , \frac{1}{2} , \frac{2}{3} , \frac{3}{4} , \frac{4}{5} ,.....$$

$$a_n = 2^n \quad , 2 , 4 , 8 , 16 , 32 ,...$$

$$a_n = -2n \quad , -2 , -4 , -8 , -16 , -32 ,.....$$

$$a_n = \frac{1}{2^n - 1} \quad , 1 , \frac{1}{3} , \frac{1}{7} , \frac{1}{15} ,....$$

$$a_n = \frac{1}{n^2} \quad , 1 , \frac{1}{4} , \frac{1}{9} , \frac{1}{16} , \frac{1}{25} ,.....$$

$$a_n = \frac{n+3}{2} \quad , 2 , \frac{5}{2} , 3 , \frac{7}{2} , 4 ,.....$$

$$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2n-1}{n} \quad , -1 , \frac{3}{2} , -\frac{5}{3} , \frac{7}{4} , -\frac{9}{5} ,.....$$

■■■ Esempi di successioni definite per ricorrenza : $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{4 - a_n}{3 - a_n} \\ a_o = 1 \end{cases}$

$$n = 0 \Rightarrow a_o = 1$$

$$n = 1 \Rightarrow a_1 = \frac{4 - a_o}{3 - a_o} = \frac{3}{2} = \frac{2 \cdot (1) + 1}{(1) + 1}$$

$$n = 2 \Rightarrow a_2 = \frac{4 - a_1}{3 - a_1} = \frac{4 - \frac{3}{2}}{3 - \frac{3}{2}} = \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot (2) + 1}{(2) + 1}$$

$$n = 3 \Rightarrow a_3 = \frac{4 - a_2}{3 - a_2} = \frac{4 - \frac{5}{3}}{3 - \frac{5}{3}} = \frac{7}{4} = \frac{2 \cdot (3) + 1}{(3) + 1}$$

$$n = 4 \Rightarrow a_4 = \frac{4 - a_3}{3 - a_3} = \frac{4 - \frac{7}{4}}{3 - \frac{7}{4}} = \frac{9}{5} = \frac{2 \cdot (4) + 1}{(4) + 1}$$

$$n = 5 \Rightarrow a_5 = \frac{4 - a_4}{3 - a_4} = \frac{4 - \frac{9}{2}}{3 - \frac{9}{2}} = \frac{11}{6} = \frac{2\cdot(5) + 1}{(5) + 1}$$

e quindi per la regolarità di formazione dei termini della successione risulta : $a_n = \dfrac{2n + 1}{n + 1}$

Successioni monotone

I valori a_n dipendono dall'operatore $\boldsymbol{f}$ che trasforma gli elementi di **N** in ben determinati elementi di **R** che costituiscono il **codominio** di $\boldsymbol{f}$. Per ricordare ciò scriviamo : $a_n = f(n)$ con $n \in N$

Solo in casi particolari l ' **ordinamento naturale** di N (ossia la relazione d'ordine espressa dal simbolo $\leq$) è trasferito da $\boldsymbol{f}$ a tutti i corrispondenti elementi del codominio di $\boldsymbol{f}$.

In questo caso la successione $\{a_n\}$ è <u>strettamente crescente</u> (**decrescente**) se :

$$a_n < a_{n+1} \quad [a_n > a_{n+1}\ ] \quad \forall\ n \in N$$

è <u>semplicemente crescente</u> [**decrescente**] se :

$$a_{n+1} \geq a_n \quad [a_{n+1} \leq a_n\ ]\ \forall\ n \in N$$

Una successione si dice **monotona** quando è crescente ,oppure strettamente crescente , oppure decrescente , oppure strettamente decrescente .

A volte si parla di <u>successione strettamente monotona</u> se essa è strettamente crescente o strettamente decrescente .

Una successione che ammette limite finito o infinito si dice **regolare** .

Una successione che non ammette limite si dice (<u>oscillante</u> o) **indeterminata** . Una successione monotona è sempre **regolare** . Una successione si dice **limitata** quando sono finiti sia l'estremo superiore che l'estremo inferiore del codominio di $\boldsymbol{f}$.

Limite di una successione

<u>Definizione N° 2</u> **(successione convergente)**

Si dice che la successione $\{a_n\}$ ha per limite il numero ℓ (o che converge ad ℓ o che tende ℓ) e si scrive $\displaystyle \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ quando , fissato un numero ε positivo ed arbitrario , è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1 = n(\varepsilon) \in N$ tale che per ogni $n > n_1$ si abbia :

$$|a_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{cioè : } \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$$

La precedente definizione in termini simbolici diventa :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in R \quad \Leftrightarrow \quad \forall\ \varepsilon > 0\ , \exists\ n_1 = n(\varepsilon) : |a_n - \ell| < \varepsilon\ \forall\ n > n_1$$

Per verificare che la successione $\{a_n\}$ **converge** al numero ℓ si procede come segue :

1) si sceglie in maniera arbitraria il numero positivo ε

2) si risolve l'inequazione $|a_n - \ell| < \varepsilon$

3) se questa inequazione ammette come soluzione $n > n_1$ il limite è verificato ; in caso contrario la successione non converge al numero ℓ .

<u>Definizione N° 3</u> : (**successione divergente positivamente**)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ (o diverge a $+\infty$) e si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

quando , scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) , è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $a_n > K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k > 0 , \exists\, n_1 = n(K) : a_n > K \quad \forall\, n > n_1$$

<u>Definizione N° 4</u> : (**successione divergente negativamente**)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a $-\infty$ (o diverge a $-\infty$) e si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = -\infty$

quando , scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) , è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $a_n < K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k > 0 , \exists\, n_1 = n(K) : a_n < -K \quad \forall\, n > n_1$$

<u>Definizione N° 5</u> : (**successione divergente**)

Si dice che la successione $\{a_n\}$ tende a ∞(o diverge a ∞) e si scrive $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \infty$

quando , scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) , è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n_1 = n(K)$ tale che per ogni numero naturale $n > n_1$ si abbia : $|a_n| > K$.

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, k > 0 , \exists\, n_1 = n(K) : |a_n| > K \quad \forall\, n > n_1$$

<u>Definizione N° 6</u> : (**successione che diverge oscillando**)

Si dice che la successione $\{a_n\}$, in cui sia i termini positivi che quelli negativi siano in numero infinito , **diverge oscillando** ad ∞ , se per ogni K > 0 grande a piacere è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1 = n(K)$ tale che si abbia : $|a_n| > K \quad \forall\, n > n_1$

La successione di termine generale $a_n = \ln(1 + n)$ diverge positivamente , la successione di termine generale $a_n = (-1)^n \cdot \ln(1 + n)$ diverge oscillando in quanto i suoi termini sono alternativamente positivi e negativi , mentre $|a_n|$ finisce col diventare grande a piacere .

Definizione N° 7 : (di **successione indeterminata**)

Una successione che non sia né convergente né divergente si dice **indeterminata**

Osservazione

Sono **successioni regolari** le successioni convergenti e quelle divergenti . Non sono successioni regolari le successioni indeterminate e le successioni che divergono oscillando .

Teoremi ed operazioni sui limiti delle successioni

TEOREMA N° 1

Ogni successione convergente è limitata

TEOREMA N° 2 (dell ' **unicità del limite**)

<< Se una successione $\{a_n\}$ tende ad un limite ℓ (finito o infinito) esso è unico >>

Dimostrazione

Dimostriamo questo teorema per assurdo , ammettendo che sia contemporaneamente :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad\qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \neq \ell$$

Senza ledere la generalità del problema possiamo supporre $\ell_1 > \ell$. Allora è possibile fissare il numero positivo ed arbitrario ε in modo che risulti : $\varepsilon < \dfrac{\ell_1 - \ell}{2}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \;\Rightarrow\; \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad \forall\, n > n_1 = n_1(\varepsilon) \in R^+ \qquad [1]$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \;\Rightarrow\; \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon \qquad \forall\, n > n_2 = n_2(\varepsilon) \in R^+ \qquad [2]$$

Le [1] e [2] valgono contemporaneamente per $n > n(\varepsilon)$ dove $n(\varepsilon)$ è il maggiore dei due numeri positivi n_1 ed n_2 . Quindi per $n > n(\varepsilon)$ possiamo scrivere :

$$\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \qquad\qquad \ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell_1 + \varepsilon$$

Da queste due disuguaglianze deduciamo che : $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$ e quindi possiamo scrivere : $\ell_1 - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon \;\Rightarrow\; \ell_1 - \ell < 2\varepsilon \;\Rightarrow\; \varepsilon > \dfrac{\ell_1 - \ell}{2}$

Questa disuguaglianza contrasta con l'ipotesi formulata all'inizio della dimostrazione . L'assurdo si toglie ammettendo che il limite della successione , quando esiste , è unico .

Teorema N° 3 (della **permanenza del segno**)

<< Se una successione $\{a_n\}$ tende al limite ℓ positivo (negativo) , i suoi termini sono definitivamente positivi (negativi) , cioè esiste un numero $p \in N$ tale che $a_n > 0$ ($a_n < 0$) $\forall\, n > p$ >>

Con parole diverse possiamo dire che se una successione $\{a_n\}$ tende ad un limite ℓ non nullo , allora da un certo indice in poi tutti i termini della successione hanno lo stesso segno di ℓ

.**<u>Teorema N° 4</u>** (**inverso del teorema della permanenza del segno**)

Sia data la successione $\{a_n\}$ tale che sia $a_n > 0$ [$a_n < 0$] , almeno da un certo indice in poi .

Allora , se esiste il $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ si ha : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \geq 0$ [$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n \leq 0$]

<u>Teorema N° 5</u> : (**del confronto fra limiti** , detto anche <u>teorema dei carabinieri</u> **)**

Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ tre successioni tali che : $a_n \leq b_n \leq c_n$

(almeno da un certo indice in poi) . Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{c_n\}$ convergono al limite ℓ , anche la successione $\{b_n\}$ converge al limite ℓ , cioè :

$$[a_n \leq b_n \leq c_n \, , \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \ell \,] \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$$

Criterio generale di convergenza (di Cauchy)

C.N.S. perché la successione $\{a_n\}$ sia convergente è che , fissato un numero ε positivo ed arbitrario , si possa determinare in corrispondenza un numero positivo $n(\varepsilon)$ tale che , per due indici **r** ed **s** entrambi maggiori di $n(\varepsilon)$, si abbia : $|a_r - a_s| < \varepsilon$

Tradotta in simboli , la precedente definizione diventa :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \, , \exists\, n(\varepsilon) > 0 : |a_r - a_s| < \varepsilon \;\; \forall\, r > s > n(\varepsilon) \wedge r, s \in N$$

Oppure , in maniera del tutto equivalente , possiamo dire che C.N.S. perchè la successione $\{a_n\}$ sia convergente è che , fissato un numero ε positivo ed arbitrario , è possibile determinare in corrispondenza un numero positivo $n(\varepsilon)$ tale , per ogni $n > n(\varepsilon)$ e per ogni $p \in N$ si abbia .

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

oppure,in forma del tutto equivalente si abbia : $|a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots + a_{n+p-1} + a_{n+p}| < \varepsilon$

Ogni successione che verifica questo criterio generale di convergenza dicesi **successione di Cauchy.**

E' bene notare come nella condizione di Cauchy non compaia il valore del limite della successione .

<u>Teorema N° 6</u>

Una successione $\{a_n\}$ è **convergente** se e solo se è di Cauchy

Teorema N° 7 (della **somma**)

Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n + b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 + \ell_2$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \ , \ \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \ell_1 + \ell_2$$

Teorema N° 8 (della **differenza**)

Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n - b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 - \ell_2$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1 \ , \ \lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = \ell_1 - \ell_2$$

Teorema N° 9 $k \in R$, $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} k \cdot a_n = k \cdot \ell$

Una costante moltiplicativa può essere portata fuori dal simbolo di limite .

Teorema N°10 (del **prodotto**)

Se due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ hanno per limiti rispettivamente i numeri ℓ_1 , ℓ_2 la successione $\{a_n \cdot b_n\}$ ha per limite il numero $\ell_1 \cdot \ell_2$, cioè il limite del prodotto di due successioni è uguale al prodotto dei limiti , $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell_1$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell_2 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \ell_1 \cdot \ell_2$

Teorema N° 11 (della **successione reciproca**)

Se la successione $\{a_n\}$ tende al limite $\ell \neq 0$, la successione reciproca $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ tende al limite $\frac{1}{\ell}$.

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\ell}$$

Teorema N° 12 (del **quoziente**)

Se la successione $\{a_n\}$ ha per limite il numero ℓ_1 e la successione $\{b_n\}$, priva di elementi nulli , converge ad $\ell_2 \neq 0$, la successione $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ converge al numero $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Teorema N° 13

Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni convergenti per le quali risulti : $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = \beta$

allora , se $a_n > 0 \quad \forall\, n \in N$, se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ si ha : $\lim_{n\to+\infty} a_n^{\,b_n} = \alpha^\beta$

Le regole di Cesaro

Risultano utili per il calcolo di limiti di successioni che si presentano in forma indeterminate le seguenti **regole di Cesaro** .

Teorema N° 15 **(prima regola di Cesaro)**

- Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni numeriche monotone ed infinitesime (cioè due successioni per le quali risulta $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$)
- se $b_n \neq 0 \quad \forall\, n \neq 0$
- se esiste finito o infinito il seguente limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$

allora esiste anche il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$ e si ha : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}}$

Teorema N° 16 **(seconda regola di Cesaro)**

- Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono due successioni numeriche
- Se $b_n \neq 0 \quad \forall\, n \in N$
- Se la successione $\{b_n\}$ è monotona crescente e divergente a $+\infty$ (oppure monotona decrescente e divergente a $-\infty$) . Nessuna ipotesi si formula sulla successione $\{a_n\}$
- se esiste finito o infinito il seguente limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$ allora esiste anche il limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

e si ha : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}}$

O S S E R V A Z I O N E

- I due teoremi di Cesaro costituiscono delle condizioni **sufficienti** ma **non necessarie** per l'esistenza del limite : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n}$

Essi sono l'equivalente dei due teoremi di De L'Hospital per le funzioni continue $\boldsymbol{f}$**(x)** .

- Dalle due regole di Cesaro derivano cinque regole pratiche che alcuni autori chiamano **applicazioni delle regole di Cesaro** .

PRIMA APPLICAZIONE

Se la successione $\{a_n\}$ ha limite ℓ , finito o infinito , anche la successione $\left\{\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\right\}$ ha lo stesso limite ℓ , cioè : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n}$

SECONDA APPLICAZIONE

Se le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono **convergenti** ed hanno per limiti rispettivamente i numeri α e β , allora la successione $\left\{\frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n}\right\}$ risulta convergente ed ha per limite il numero $\alpha \cdot \beta$, cioè :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_{n-1} b_2 + a_n b_1}{n} = \lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = \alpha \cdot \beta}$$

TERZA APPLICAZIONE

Se la successione $\{a_n\}$ a termini positivi ammette limite ℓ , finito o infinito , anche la successione $\left\{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots\cdots a_{n-1} \cdot a_n}\right\}$ ammette lo stesso limite ℓ , cioè :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \left\{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdots\cdots a_{n-1} \cdot a_n}\right\} = \lim_{n\to+\infty} a_n}$$

QUARTA APPLICAZIONE

- Se la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi
- se la successione $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ ha limite ℓ , finito o infinito , allora la successione $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ ha lo stesso

limite , cioè : $$\lim_{n\to+\infty} \left\{\sqrt[n]{a_n}\right\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

QUINTA APPLICAZIONE

- 1) Se la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi

 2) se risulta : $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k < 1$$

allora la successione $\{a_n\}$ **converge a zero** (cioè risulta infinitesima) in quanto si ha :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

- Se invece risulta : $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k > 1}$$

 allora la successione $\{a_n\}$ **diverge positivamente**

- Nulla può dirsi sul carattere della successione $\{a_n\}$ se risulta :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = k = 1}$$

Limiti fondamentali

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \ , \ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e \ \text{ se } \lim_{n\to+\infty} a_n = \infty \ , \ \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1 + a_n)}{a_n} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} = 1 \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^{a_n} - 1}{a_n} = \ln b \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

In particolare abbiamo :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\left(b^{\frac{1}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln b} \qquad \text{In quanto risulta :} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\cdot \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \lim_{n\to+\infty} (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e \quad \text{se} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \text{se} \quad a > 0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1 \quad \text{con} \quad b \in R \quad , \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}} \quad \text{se} \ a_n > 0 \quad ; \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(a_{n+1} - a_n\right)}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_o}{b_o}\cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n^q} = \frac{a_o}{b_o}\cdot \lim_{n\to+\infty} n^{p-q} = \begin{cases} \infty & se \quad p > q \\ \dfrac{a_o}{b_o} & se \quad p = q \\ 0 & se \quad p < q \end{cases}$$

$$P(n) = a_o n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots\ldots + a_{p-1} n + a_p \quad , \ Q(n) = b_o n^q + b_1 n^{q-1} + \ldots\ldots + b_{q-1} n + b_q$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(a_o n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots\ldots + a_{p-1} n + a_p\right) = \lim_{n\to+\infty} n^p \cdot \left(a_o + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots\ldots + \frac{a_{p-1}}{n^{p-1}} + \frac{a_p}{n^p}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} a_o \cdot n^p = \infty$$

con $p \in N$. Per individuare il segno di ∞ bisogna conoscere il segno di a e la parità o disparità dell'esponente p .

Le seguenti successioni divergenti sono ordinate in senso crescente di rapidità :

$$\boxed{\ln n} \qquad \underset{0 < \alpha < 1}{\boxed{n^{\alpha}}} \qquad \boxed{n} \qquad \underset{\beta > 1}{\boxed{n^{\beta}}} \qquad \underset{k > 1}{\boxed{k^{n}}} \qquad \boxed{n!} \qquad \boxed{n^{n}}$$

Definizione di serie numerica

■ Sia data una successione di numeri reali $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n \cdots$ **[1]**

Una scrittura del tipo : $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n + \ldots..$

esprimente la somma di infiniti termini non ha significato nel senso ordinario di somma . Possiamo però dargliene uno calcolando le somme :

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$ **[2]**

....

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots\ldots + a_{n-1} + a_n$

e considerando la successione che così si ottiene : $S_1 \ , \ S_2 \ , \ S_3 \ , \ldots.., S_n, \ldots..$ **[3]**

La successione $\{S_n\}$ di termine generale S_n prende il nome di **SERIE NUMERICA** .

Una serie numerica può essere indicata con una delle due seguenti scritture :

$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n + \ldots..$ $\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **[4]**

L'espressione $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.. + a_n + \ldots..}$ **[5]**

detta **serie numerica** di *termine generale* a_n , ha un carattere puramente formale in quanto l'operazione di somma non è definita quando il numero di addendi è infinito .

Tali scritture simboliche servono però a significare che si vuole ricavare la successione [3] .

I numeri $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ si dicono i **termini della serie** ; a_n è il **termine generale** .

Le espressioni $S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, ...$ si chiamano le **somme parziali** o le ridotte della serie [5] .

La [3] è la **successione delle somme parziali** della serie [5] .

Lo studio di una serie non è altro che lo studio di una successione i cui termini vengono generati da una particolare legge di formazione .

Poichè una serie è una *successione* , essa può essere **convergente** , divergente , *oscillante* (o indeterminata) a seconda che tale sia la successione $\{S_n\}$ delle sue ridotte .

Se la successione $\{S_n\}$ è **REGOLARE** ed ha limite **S** (finito o infinito) diremo che la serie [5] è **REGOLARE** ed ha per somma

$$\boxed{S = \lim_{n \to +\infty} S_n} \qquad \textbf{[6]}$$

Se la successione delle **somme parziali** converge al limite **S** , è naturale considerare **S** come la somma degli infiniti addendi $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, ...$ nell'ordine in cui si presentano .

La serie [5] **diverge positivamente** o negativamente se diverge positivamente o negativamente la successione $\{S_n\}$. Si scrive :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty} \qquad \textbf{[7]}$$

Qualora una serie risulti **convergente** , detto **S** il limite della successione [3] : $S = \lim_{n \to +\infty} S_n$

si dirà che **S** è la somma della serie e si potrà scrivere :

$$\boxed{S = a_1 + a_2 + a_3 + ...+ a_n + ... = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} S_n} \qquad \textbf{[8]}$$

Il **carattere di una serie** esprime la sua proprietà di essere **convergente** , divergente,*indeterminata* .

Si dice che due serie hanno lo **stesso carattere** quando sono entrambe convergenti , divergenti o indeterminate .

T E O R E M A N° 1

Il carattere di una serie **non si altera** se moltiplichiamo tutti i suoi termini per uno stesso numero non nullo , o se trascuriamo un numero finito di suoi termini .

T E O R E M A N° 2

Una serie i cui termini , almeno da un certo indice in poi , siano tutti positivi (o tutti negativi) **non può essere indeterminata** .

D E F I N I Z I O N E

Dicesi **resto ennesimo** (o resto di ordine n) della serie [5] la serie che si ottiene da essa sopprimendo i primi n termini

$$\boxed{R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n+k}} \qquad \textbf{[9]}$$

T E O R E M A N° 3

La serie [5] ed ogni suo resto hanno sempre lo stesso carattere , cioè sono ***entrambe convergenti*** *, o* *divergenti* *, o* indeterminate . Inoltre R_n rappresenta , in valore assoluto , l'errore che si commette quando la somma della serie viene sostituita dalla somma dei suoi primi **n** termini .

D E F I N I Z I O N E

Dicesi **resto parziale** di indici **n** e **k** della serie [5] la somma di k termini successivi al termine a_n , cioè :

$$\boxed{R_{n,k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k} = S_{n+k} - S_n} \qquad \textbf{[10]}$$

D E F I N I Z I O N E

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **convergente** ed ha per somma **S** se $\forall \ \varepsilon > 0$ è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1(\varepsilon)$ tale che si abbia: $|S_n - S| < \varepsilon \quad \forall \ n > n_1(\varepsilon)$

D E F I N I Z I O N E

Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **divergente** se scelto un numero positivo ed arbitrario K (e come tale grande a piacere) è possibile determinare in corrispondenza un indice $n_1(K)$ tale che si abbia :

$$|S_n| > K \qquad \forall \ n > n_1(K)$$

T E O R E M A N° 5

(**Criterio di Cauchy per la convergenza di una serie** o criterio generale di convergenza di Cauchy)

C.N.S. perchè la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sia **convergente** è che fissato un arbitrario numero positivo $\varepsilon > 0$, è possibile determinare in corrispondenza un indice $p \in N$, tale che per ogni $n > p$ e qualunque sia il numero naturale k , si abbia :

$$\boxed{|R_{n,k}| = |S_{n+k} - S_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon \qquad \forall \ n > p \ \wedge \ \forall \ k \in N}$$

T E O R E M A

(<u>**condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie**</u>)

Condizione necessaria perché una serie sia convergente è che il suo termine generale a_n tenda a zero quando $n \to +\infty$. Se la serie [5] è **convergente** allora deve essere : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$

Di conseguenza , se risulta $\lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è sicuramente **divergente** .

Se invece risulta $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$ la serie può essere sia convergente che divergente .

Serie numerica combinazione lineare di altre serie numeriche

Date due serie numeriche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e scelte due costanti $h, k \in R$, definiamo **serie combinazione lineare delle due serie date** la seguente serie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(h \cdot a_n + k \cdot b_n \right)$$

In particolare , per **h = k = 1** abbiamo la <u>serie somma</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n + b_n \right)$, per **h = 1 , k = - 1** abbiamo la <u>serie differenza</u> $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n - b_n \right)$, per **k = 0** abbiamo la serie prodotto per il numero reale h $\sum_{n=1}^{+\infty} h \cdot a_n$.

Se le serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ sono **convergenti** ed hanno per somma rispettivamente S_1 , S_2 allora la serie combinazione lineare $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(h \cdot a_n + k \cdot b_n \right)$ è convergente e la sua somma **S** vale $h \cdot S_1 + k \cdot S_2$.

La somma o la differenza di due serie convergenti è una serie convergente .
Se una serie converge e l'altra diverge , la somma algebrica delle due serie diverge .

O S S E R V A Z I O N E

■ Una serie può essere intesa come quell'algoritmo (procedimento di calcolo) che permette di ottenere la somma di un numero infinito di termini mediante l'associazione dell'operazione aritmetica di addizione a quella di passaggio al limite .

■ Studiare una serie significa stabilirne il carattere ed , eventualmente , calcolarne ls somma **S** .

■ La somma **S** può essere calcolata solo se riusciamo a trasformare la somma dei primi n termini in una espressione algebrica data da una formula matematica . Per le serie telescopiche e per le **serie geometriche** è sempre possibile calcolare **S** .

- Per dire che la serie $\sum a_n$ **converge** scriviamo $\sum a_n < +\infty$ per dire che la serie $\sum a_n$ **diverge** scriviamo $\sum a_n = +\infty$.

Serie a termini positivi

Si tratta di serie i cui termini sono tutti positivi , almeno a partire da un certo indice in poi . Infatti , se in una serie i termini risultassero positivi soltanto da un certo indice **p** in poi , potremmo ricondurci agevolmente ad una serie a termini tutti positivi considerando la serie resto R_p che , come sappiamo , ha lo stesso carattere della serie data . Le serie i cui termini sono tutti negativi si trattano alla stessa maniera delle serie a termini positivi . Adesso stabiliamo per queste serie a termini positivi dei criteri che ci consentano di stabilire se una serie è convergente o divergente .

Criteri di convergenza e di divergenza per le serie a termini positivi

■ Una serie a termini positivi non può essere oscillante , essa o è **convergente** o è *divergente positivamente* .

Per le serie a termini positivi valgono particolari **criteri di convergenza o di divergenza** che ,però,a differenza del criterio di Cauchy , danno solo condizioni sufficienti ma non necessarie .

■ Si dice che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **maggiorante** della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e questa è **minorante** della prima se risulta : $a_n \geq b_n \quad \forall\, n \in N$

In questo caso la somma dei primi n termini della prima serie non è mai minore ($\geq$) della somma dei primi n termini della seconda serie .

■ **Criterio del confronto** (di GAUSS)

Siano date due serie a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e supponiamo che la prima serie sia maggiorante delle seconda serie . Allora :

1) **se la serie maggiorante è convergente risulta pure convergente la serie minorante**
2) **se la serie minorante diverge (positivamente) anche la serie maggiorante diverge positivamente** .

E S E M P I O

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ è **convergente** in quanto è **minorante** della serie geometrica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ che è <u>convergente</u> in quanto la sua ragione $q = \frac{1}{2}$ è minore di uno .

■ **Secondo criterio del confronto** (o <u>criterio del confronto asintotico</u>)

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini positivi per le quali risulta : $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = k}$ **[11]**

Se risulta :

1) **k = numero reale finito diverso da zero** , le due serie hanno lo stesso carattere, cioè sono entrambe convergenti o entrambe divergenti

2) $k = +\infty$ Ricordando la definizione di successione divergente applicata alla successione avente termine generale $\frac{a_n}{b_n}$, possiamo scrivere : $\frac{a_n}{b_n} > K$ (almeno da un certo indice in poi) ed anche :

$a_n > K \cdot b_n$ Questo significa che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **maggiorante** della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ e quindi , per il teorema del confronto , possiamo affermare che :

<< se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge** anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **converge** , se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **diverge** anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **diverge** . Nulla possiamo dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge , o se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ converge.

3) $k = 0$ Ricordando la definizione di successione convergente infinitesima a pplicata alla successione avente termine generale $\frac{a_n}{b_n}$, possiamo scrivere : $\frac{a_n}{b_n} < \varepsilon$ (almeno da un certo indice in poi) ed anche $a_n < \varepsilon \cdot b_n$. Questo significa che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ è **maggiorante** della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ e quindi , per il teorema del confronto , possiamo affermare che :

1) se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **converge** anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge**

2) se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **diverge** anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **diverge**

3) Nulla possiamo dire se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge** o se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ **diverge .**

Criterio dell'ordine di infinitesimo

Dal criterio del confronto asintotico possiamo ricavare il seguente notevole **criterio dell'ordine di infinitesimo** .

Come serie $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ scegliamo la seguente *serie armonica generalizzata* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ poiché di essa conosciamo il carattere al variare dell'esponente **p** . Calcoliamo il seguente limite :

$$\boxed{k = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to+\infty} n^p \cdot a_n}$$

Se risulta :

1) **k = numero reale finito non nullo** , cioè se $k \in]0,+\infty[$ allora la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ ha lo stesso carattere della *serie armonica generalizzata* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$.

Pertanto la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **converge** se $\mathbf{p > 1}$, diverge se $p \le 1$.

2) $\boxed{k = 0}$ In questo caso la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **maggiorata** dalla serie armonica generalizzata e se questa converge ($\mathbf{p > 1}$) converge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, Nulla possiamo dire sul carattere della serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se la serie armonica generalizzata diverge .

3) $\boxed{k = +\infty}$ In questo caso la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **maggiora** la serie armonica generalizzata e se questa **diverge** ($p \le 1$) diverge anche $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Nulla possiamo dire sul carattere della serie data $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ se la serie armonica generalizzata converge

C O N C L U S I O N E

1) $k \ne 0$, $p > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

2) $k \ne 0$, $p \le 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

3) $k = 0$, $p > 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge

4) $k = +\infty \quad , \quad p \le 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ diverge

5) $k = 0 \quad , \quad p \le 1$ il criterio è inefficace

6) $k = +\infty \quad , \quad p > 1$ il criterio è inefficace

Questo criterio di solito viene utilizzato quando il termine generico a_n della serie è il rapporto di polinomi in n , o il rapporto tra un polinomio in n e qualche espressione irrazionale in n .

Criterio del rapporto (o di D ' ALAMBERT)

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ a termini positivi . Se è possibile determinare un numero reale $0 < k < 1$ ed un indice **p** tali che $\forall n > p \in N$ risulti :

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \le k < 1} \qquad \textbf{[14]}$$

la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è **CONVERGENTE** , se invece risulta $\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1}$ la serie è **DIVERGENTE** .

Nella pratica non è sempre facile determinare una limitazione del rapporto $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Per questo motivo è preferibile considerare il limite di tale rapporto quando $n \to +\infty$.

Si ottengono i seguenti risultati :

1) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **CONVERGE** 2) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1}$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **DIVERGE**

3) $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1}$ il criterio è <u>inefficace</u> . Questo significa che il criterio non è adatto a stabilire la convergenza o la divergenza della serie ed è necessario ricorrere ad un altro criterio .

Questo criterio, di solito , si utilizza con efficacia se nel termine generico a_n della serie c'è qualche fattoriale di n o di una sua espressione , o se c'è qualche potenza ennesima di un numero reale dato , cioè una potenza del tipo a^n (2^n oppure 5^n) .

CRITERIO DELLA RADICE (o Di Cauchy)

Se da un certo indice in poi risulta $0 < \sqrt[n]{a_n} \le k < 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **CONVERGE** , se invece risulta $0 < \sqrt[n]{a_n} \ge 1$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ **DIVERGE** .

Nella pratica ,non essendo agevole la determinazione di una limitazione per il termine generale $\sqrt[n]{a_n}$, è più conveniente considerare il limite per $n \to +\infty$ di tale radice . Perveniamo ai seguenti risultati :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} < 1 & \text{la serie CONVERGE} \\ > 1 & \text{la serie DIVERGE} \\ = 1 & \text{il criterio è inefficiace} \end{cases}$$

Studio dettagliato di alcune serie particolarmente importanti

SERIE DI MENGOLI (1650)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Passando al limite otteniamo : $S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$

La <u>serie di Mengoli</u> è convergente ed ha somma **S = 1** .

Serie di Bernoulle

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!} + \cdots = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right]$$

$$S_n = \left(1 - \frac{1}{2!}\right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3|}\right) + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{4!}\right) + \cdot\cdot \left[\frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{n!}\right] \cdot\cdot + \quad + \left[\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}\right] =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left[1 - \frac{1}{(n+1)!}\right] = 1$$

La **<u>serie di Bernoulle</u>** è convergente ed ha per somma **S = 1** .

Serie armonica

La serie armonica è chiamata cosi perché i suoi termini sono in progressione armonica (cioè i loro inversi formano una progressione aritmetica) .

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \ldots$$

La serie armonica è **divergente** . Il termine generico a_n tende a zero quando $n \to +\infty$, perché $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$, però la serie non è convergente .

Serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \ldots + \frac{1}{(n-1)^p} + \frac{1}{n^p} + \ldots \qquad p \in R$$

Se $p \le 1$ la serie armonica generalizzata **diverge positivamente**

se $p > 1$ la serie armonica generalizzata **converge** .

Serie telescopiche

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice **telescopica** quando il suo termine generale a_n può essere scritto come differenza $b_n - b_{n+k}$ di due termini di una medesima successione $\{b_n\}$, calcolati per due valori diversi dell'indice .

Quindi per **serie telescopica** intendiamo qualsiasi serie che può essere ricondotta alla seguente forma :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(b_n - b_{n+k}\right) \qquad \forall\ k \in N$$

La somma **S** di una serie telescopica convergente vale : $\boxed{S = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_{k-1}}$

La somma **S** della serie telescopica $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è uguale alla somma dei primi k termini della successione $\{b_n\}$.

Esempio numerico

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{14}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4}$$

Serie geometriche

Si chiama **SERIE GEOMETRICA** una serie i cui termini formano una progressione geometrica , cioè tali che ognuno di essi si possa ottenere moltiplicando il precedente per uno stesso numero non nullo **q** , detto **ragione della serie geometrica** .

Detti **a** e **q** , rispettivamente , il primo termine e la ragione della serie geometrica abbiamo :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a \cdot q^n = a + aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \ldots + aq^n + \ldots\ldots \qquad a, q \in R - \{0\}$$

La **somma parziale ennesima** è data da :

$S_n = a + aq + aq^2 + aq^3 + ... + aq^n = a \cdot \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ (i termini della serie sono **n+1**)

Perveniamo alle seguenti conclusioni :

1) Se $\boxed{-1 < q < 1}$ la serie geometrica risulta **convergente** ed ha come somma $\boxed{S = \dfrac{a}{1 - q}}$

Infatti : $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = 0$

2) Se $\boxed{q \geq 1}$ la serie geometrica **diverge positivamente** se $a > 0$, <u>negativamente</u> se $a < 0$.

Infatti : se **q > 1** abbiamo : $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = +\infty$ e quindi la serie diverge positivamente se $a > 0$, negativamente se $a < 0$.

Se **q = 1** la serie geometrica assume la forma : $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a + a + a + \cdots + a + \cdots$

In questo caso risulta : $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$ $\lim_{n \to +\infty} S_n = \infty$

e quindi la serie geometrica è divergente .

3) Se $\boxed{q \leq -1}$ la **serie geometrica è indeterminata** . Infatti non esiste il seguente limite $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1}$ e quindi non esiste neanche : $\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} a$ e si conclude che la serie geometrica risulta indeterminata .

Qualche raro autore fa , nell'ipotesi **q < -1** , il seguente ragionamento . $\lim_{n \to +\infty} q^{n+1} = \infty$ ricordando che q^{n+1} assume valori positivi (negativi) quando n è pari (dispari) , e di conseguenza i termini della successione $\{S_n\}$ diventano , in valore assoluto, sempre più grandi ma assumono segni alternativamente positivi e negativi . Si dice , in questo caso , che la **serie diverge oscillando** .

Invece , per **q = -1** S_n vale 1 per n pari , 0 per n dispari . La <u>serie geometrica</u> , in questo caso , <u>è indeterminata</u> .

■ Per **a = 1** la serie geometrica assume la forma :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + \cdots}$$

Le conclusioni sono identiche a quelle dedotte precedentemente . In caso di convergenza la somma **S** vale : $\boxed{S = \dfrac{1}{1 - q}}$

Serie a termini di segno alternato

Se $\{a_n\}$ è una <u>successione a termini positivi</u> , allora la serie :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \cdots + (-1)^{n+1}\cdot a_n + \cdots \qquad \textbf{[20]}$$

è detta **serie a termini di segno alternativamente positivo e negativo** o <u>serie a segni alterni</u> o *serie di segno alterno* o serie alternata o serie a termini alternativamente positivi e negativi .

Criterio di Leibniz

Se la successione $\{a_n\}$ a termini positivi è **decrescente** $(a_{n+1} < a_n)$ ed <u>infinitesima</u> ($\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$), allora la serie a segni alterni [20] è **convergente** e sussiste la seguente formula di maggiorazione del resto :

$$\boxed{|R_n| \le a_{n+1}} \qquad \textbf{[21]}$$

Serie assolutamente convergenti ed assolutamente divergenti

Consideriamo la serie a termini reali e di segno qualsiasi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n + \ldots\ldots \qquad \textbf{[22]}$$

La serie

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots} \qquad \textbf{[23]}$$

dicesi **serie dei moduli** associata alla serie [22] . Tale serie <u>non può essere indeterminata</u> in quanto i suoi termini sono *non negativi* .

D E F I N I Z I O N E

Una serie si dice **assolutamente convergente** quando è convergente la <u>serie dei moduli ad essa associata</u> . Quando una serie **converge** , <u>senza convergere assolutamente</u> , si dice che è *semplicemente convergente* , o *condizionatamente convergente* , o *semiconvergente* .

Quindi una serie si dice **semplicemente convergente** quando è <u>convergente</u> ma non è *assolutamente convergente* .

T E O R E M A N° 6

Una serie **assolutamente convergente** è anche <u>semplicemente convergente</u> . Tale teorema non è invertibile , in quanto una serie può essere semplicemente convergente senza essere assolutamente convergente .

- I criteri esposti per le serie numeriche a termini positivi sono altrettanti criteri di convergenza assoluta se applicati alla serie dei moduli $\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|$

<u>ESEMPIO N° 1</u> : Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}$

Calcoliamo il limite del termine generale a_n . Avremo : $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} \neq 0$. Non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza , la serie proposta,che non può essere indeterminata in quanto a termini tutti positivi , è quindi **divergente** .

<u>ESEMPIO N° 2</u> : Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \frac{3}{16} - \cdots$

Mettendo in evidenza la costante moltiplicativa 3 , otteniamo :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 3\cdot\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \cdots\right) = 3\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = -\frac{1}{2}$ e primo termine **1** . La sua somma **S** vale :

$$S = 3\cdot\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2$$

<u>ESEMPIO N° 3</u> : Studiare la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \frac{32}{243} + \cdots$

Isolando i primi due termini e mettendo in evidenza nei rimanenti termini il fattore $\frac{4}{9}$ avremo :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9}\cdot\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \frac{16}{81} - \cdots\right) = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

Si tratta di una serie geometrica di ragione $q = -\frac{2}{3}$ e primo termine **1** , moltiplicata per $\frac{4}{9}$ e con l'aggiunta di due termini iniziali . Essendo $q = \left|-\frac{2}{3}\right| < 1$, la serie sarà **convergente** ed avrà come somma il numero $S = \frac{8}{5} - \frac{3}{4} + \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{67}{60}$.

<u>ESEMPIO N° 4</u> : Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \cdots$$

Si tratta di una serie a segni alterni dove $a_n = \frac{1}{n!}$. Per il criterio di Leibnitz la serie converge .

Infatti : 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$ (la successione $\{a_n\}$ è infinitesima)

2) $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{n!} = a_n \quad \forall n>0$ (la successione $\{a_n\}$ è strettamente decrescente)

Quindi sono soddisfatte le due condizioni del criterio di Leibnitz e la serie è **convergente** .

<u>ESEMPIO N° 5</u> : Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$

$$n^2 + 1 < 2^n \quad \forall\, n \geq 5 \Rightarrow \frac{n^2+1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} \Rightarrow \frac{n^2+1}{3^n} < \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

La serie proposta $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n}$ **converge** in quanto maggiorata dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ convergente avendo quest'ultima come ragione il numero $q = \frac{2}{3} < 1$.

<u>ESEMPIO N° 6</u> : Determinare il carattere della serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4n-1}{n^2+5n+7}$

Applico il criterio del confronto asintotico utilizzando come serie di confronto la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Abbiamo : $a_n = \frac{4n-1}{n^2+5n+7}$, $b_n = \frac{1}{n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4n-1}{n^2+5n+7}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^2-n}{n^2+5n+7} = 4 \text{ valore finito diverso da zero}$$

La nostra serie e la serie armonica hanno lo stesso carattere , per cui la serie proposta è **divergente** .

<u>ESEMPIO N° 7</u> : Determinare il carattere della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

Applico il criterio del rapporto. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n \cdot n!} =$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$ La serie proposta **converge** .